Решение задач интернет тура Олимпиады МИРЭА по математике для 9-11 классов 2016-2017

1.(9-11). Найти наибольшее значение функции $f \quad x \qquad 3\cos^2 x \quad 2\sin x \quad 1$.

Преобразуем функцию

$f \quad x \qquad 3 \;\; 1 \;\; \sin^2 x \qquad 2\sin x \quad 1 \qquad 3\sin^2 x \quad 2\sin x \quad 4$.

Теперь рассмотрим задачу равносильную исходной.

Найти наибольшее значение функции

$f \quad t \qquad 3t^2 \quad 2t \quad 4, \;\; t \quad 1$.

Графиком этой функции является часть параболы с ветвями вниз и вершиной в точке $\frac{1}{3}, \frac{13}{3}$. Так как $t_{в} \quad \frac{1}{3} \qquad 1{,}1$, то $f \quad t_{в} \quad \frac{13}{3}$ и есть наибольшее значение искомой функции.

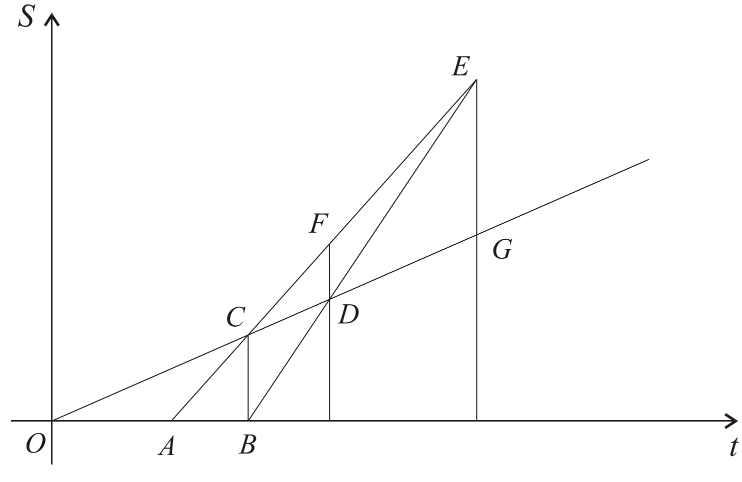
Ответ: $\frac{13}{3}$.

2. (9-11). Пешеход, велосипедист и автомобилист двигались в одном направлении. В момент, когда велосипедист догнал пешехода, автомобилист отставал на 10 км. Когда автомобилист догнал пешехода, велосипедист был от них в 2 км. На какое расстояние отставал пешеход в момент, когда автомобилист догнал велосипедиста, если скорости участников движения постоянны?

Решение. Изобразим процесс движения графически рис.1. Пешеход двигался из точки O в точку G, причем в точке C произошла его встреча с велосипедистом. Велосипедист двигался по прямой ACFE, приче м в точке E произошла его встреча с автомобилистом. В точке D произошла встреча пешехода и автомобилиста.

По условию $BC \quad 10, FD \quad 2$. Надо найти EG.

Из подобия треугольников BCD и DEG имеем $\frac{CD}{EG} \quad \frac{BD}{DE} \quad \frac{10}{EG}$. Из подобия треугольников BCE и DFE имеем



$\frac{ED \quad DB}{ED} \quad \frac{10}{2}$ или $\frac{BD}{DE} \quad 4$. В результате получаем $EG \quad \frac{5}{2}$.

рис.1.

Ответ: $\frac{5}{2}$.

3.(9-11). Решить неравенство $\dfrac{x \quad 2 \quad x^2 \quad 4 \quad x \quad 4 \quad \sqrt{x^2 \quad x \quad 2}}{1 \quad x \quad 4 \quad 3 \quad x \quad x \quad 5} \quad 0$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\frac{x \quad 2 \quad \left|x^2 \quad 4\right| \quad x \quad 4 \quad \sqrt{x^2 \quad x \quad 2}}{1 \quad x \quad 4 \quad 3 \quad x \quad x \quad 5} \quad 0$$

Теперь заменим каждую скобку на разность квадратов

$$\frac{x \quad 2 \quad x^2 \quad 4 \quad x \quad 2 \quad x^2 \quad 4 \quad x^2 \quad 8x \quad 16 \quad x^2 \quad x \quad 2}{1 \quad x \quad 4 \quad 1 \quad x \quad 4 \quad 3 \quad x \quad x \quad 5 \quad 3 \quad x \quad x \quad 5} \quad 0$$

Окончательно получаем

$$\begin{array}{l} \dfrac{x \quad 2}{x \quad 3 \quad x \quad 5 \quad x \quad 1} \quad 0 \\ x \quad 2 \quad x \quad 1 \quad 0 \end{array}.$$

Ответ: $3, \; 2 \quad 2,5$.

4.(9-11). Известно, что у двух многочленов $P_n \; x$ и $Q_m \; x$ с целыми коэффициентами сумма этих коэффициентов одинакова. Доказать, что $P_n \; 2017 \quad Q_m \; 2017$ делится без остатка на 2016.

Решение. Из условия равенства суммы коэффициентов двух многочленов следует, что $P_n \; 1 \quad Q_n \; 1$. С учетом этого факта и того, что

$$P_n \; 2017 \quad P_n \; 1 \,\vdots\, 2016 \text{ и } Q_m \; 2017 \quad Q_m \; 1 \,\vdots\, 2016$$

имеем

$$P_n \; 2017 \quad Q_m \; 2017 \quad P_n \; 2017 \quad P_n \; 1 \quad Q_m \; 2017 \quad Q_m \; 1 \,\vdots\, 2016.$$

6.(9-11). Решить уравнение $\sqrt{1 \quad 2\cos^2 x} \quad \sin x \quad \sin x \quad \sqrt{3 \quad 2\sin^2 x} \quad 3$.

С учетом того, что $1 \quad 2\cos^2 x \quad 3 \quad 2\sin^2 x$, сделаем следующие обозначения

$$u \quad \sqrt{3 \quad 2\sin^2 x} \quad 1, v \quad \sin x, \; v \quad 1.$$

Теперь можно составить систему

$$\begin{matrix} u \quad v \quad uv \quad 3 \\ u^2 \quad 2v^2 \quad 3 \end{matrix} .$$

Выражаем из первого уравнения $u \quad \frac{4}{v \quad 1} \quad 1$, подставляем во второе уравнение системы, и получаем

$$v^4 \quad 2v^3 \quad 6v \quad 3 \quad 0 .$$

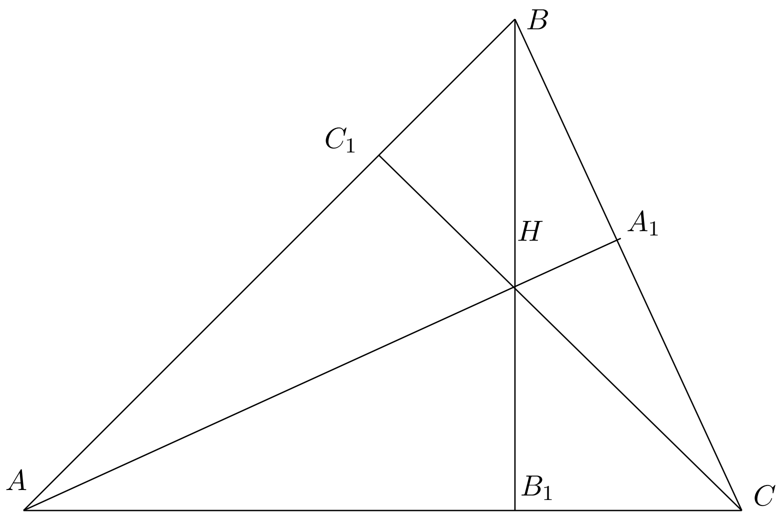
Первый корень этого уравнения $v \quad 1$. Для нахождение других корней необходимо решить уравнение

$$v^3 \quad 3v^2 \quad 3v \quad 3 \quad 0 \qquad v^3 \quad 3v^2 \quad 3v \quad 1 \quad 4 \qquad v \quad \sqrt[3]{4} \quad 1 .$$

Ответ: $x \quad \frac{}{2} \quad 2 \; n \, ; x \quad arcsin \quad \sqrt[3]{4} \quad 1 \quad 2 \; k \, ; x \qquad arcsin \quad \sqrt[3]{4} \quad 1 \quad 2 \; l \, , n \, , k \, , l \quad Z.$

5 (9 — 11). В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Известно, что $BH = 1$ и $\angle AHC = 105°$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. Построим чертеж, изобразив на нем треугольник ABC и три его высоты: AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H.



Рассмотрим четырехугольник BA_1HC_1. В нем два угла прямые, а угол $\angle A_1HC_1 = \angle AHC = 105°$. Следовательно, четвертый угол равен $\angle ABC = 75°$.

Далее, если на отрезке BH, как на диаметре, построить окружноссть, то эта окружность пройдет через точки A_1 и C_1, поскольку из каждой из этих точек отрезок BH виден под прямым углом. Следовательно, эта окружность является описанной около треугольника A_1BC_1, и BH — ее диаметр.

Треугольние A_1BC_1 подобен треугольнику ABC, поскольку угол $\angle ABC$ у них общий и

$$BA_1 = BA\cos\angle ABC, \ BC_1 = BC\cos\angle ABC.$$

Коэффициент подобия, очевидно, равен $\cos\angle ABC$. Поскольку радиус окружности, описанной около малого треугольника A_1BC_1, равен $1/2$, искомый радиус равен

$$R = \frac{1}{2\cos 75°}.$$

Осталось вычислить этот косинус.

Обозначим его за x. Тогда формула синуса двойного угла позволяет нам написать уравнение

$$2x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}.$$

Возводя в квадрат, получим квадратное уравнение относительно x^2:

$$x^4 - x^2 + \frac{1}{16} = 0.$$

Как легко убедиться, такое же уравнение получится и для $\cos 15°$. Поскольку $\cos 75° < \cos 15°$, нужный нам корень — меньший из корней этого уравнения. Поэтому

$$x^2 = \frac{1-\sqrt{\frac{3}{4}}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

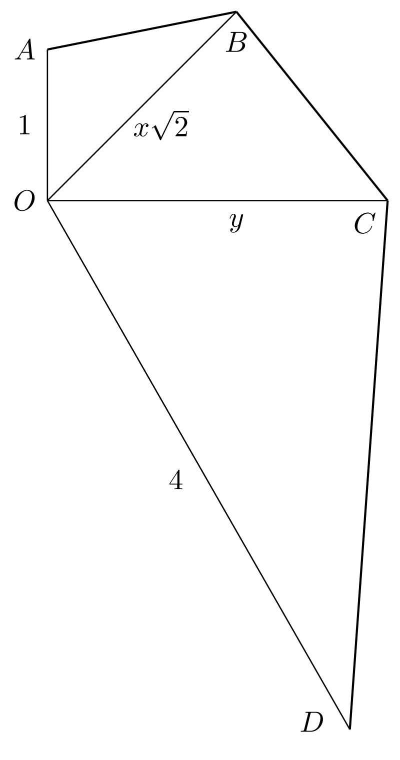
Следовательно
$$x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$
Поэтому
$$R = \frac{2\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2\cdot(3-1)} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ. $(\sqrt{6}+\sqrt{2})/2$.

7 (9 – 11). Найти наименьшее значение при $x > 0$, $y > 0$ выражения
$$\sqrt{2x^2-2x+1} + \sqrt{2x^2-2xy+y^2} + \sqrt{y^2-4y+16}.$$

Решение. Представим подкоренное выражение в первом из слагаемых в виде:
$$(x\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(x\sqrt{2}).$$
Можно убедиться, в соответствии с теоремой косинусов, что это подкоренное выражение равно квадрату длины стороны AB в треугольнике AOB, в котором $AO = 1$, $OB = x\sqrt{2}$, а угол между этими сторонами равен 45°. Первое слагаемое, таким образом, равно стороне AB.

Аналогично, второе слагаемое равно длине третьей стороны в треугольнике со сторонвми $x\sqrt{2}$ и y и углом между ними 45°, а третье слагаемое — длине третьей стороны в треугольнике со сторонами y и 4 и углом между ними 60°.



Поскольку некоторые длины сторон треугольников совпадают, эти треугольники можно пристыковать друг к другу, как видно на чертеже.

Из предыдущего ясно, что исходное выражение, которое надо минимизировать, равно длине ломаной $ABCD$.

Кратчайшая ломаная — прямая. Поэтому минимальное значение выражения равно длине отрезка AD.

Длина этого отрезка легко находится по теореме косинусов. В треугольнике AOD стороны $AO = 1$, $OD = 4$, а угол между ними равен 150°.

Поэтому
$$AD^2 = 1^2 + 4^2 - 2\cdot 1\cdot 4\cdot\cos 150^\circ = 17 + 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 17 + 4\sqrt{3}.$$
Таким образом, минимальное значение выражения равно
$$AD = \sqrt{17+4\sqrt{3}}.$$

Ответ. $\sqrt{17+4\sqrt{3}}$.