Многопрофильная
олимпиада РТУ МИРЭА
Заключительный этап
Математика 10 класс
Вариант 1

Задание 1.

Петя хочет из натуральных чисел от 1 до 100 составить 50 непересекающихся пар чисел. После этого Вася для каждой пары подсчитывает положительную разность чисел этой пары и сложит 50 полученных чисел. Как Пете надо разбить на пары, если он хочет, чтобы у Васи в результате получилось 2500?

Решение

Достаточно взять пары с разностью 50: 1 и 51, 2 и52 и так далее. Сумма разностей будет равна 50·50 = 2500.

Задание 2.

Решить систему

$$\begin{cases} x^3 - 5x^2 + 6x = y^2 \\ y^3 - 5y^2 + 6y = x^2 \end{cases}$$

Решение

Вычтем второе уравнение их первого. Получим

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 2) = -(x - y)(x + y)$$

следовательно, либо $x = y$, либо

$$x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$$

Докажем, что последнее уравнение решений не имеет. Для этого рассмотрим его как квадратное уравнение относительно x с параметром y:

$$x^2 + x(y - 2) + y^2 - 2y + 2 = 0$$

и найдем его дискриминант:

$$D = y^2 - 4y + 4 - 4y^2 + 8y - 8 = -3y^2 + 4y - 4$$

Этот квадратный трехчлен отрицателен при всех значениях y, потому что его дискриминант равен -32. Поэтому для всех решений исходной системы верно $x = y$. Подставив, получим уравнение

$$x^3 - 4x^2 + 2x = 0$$

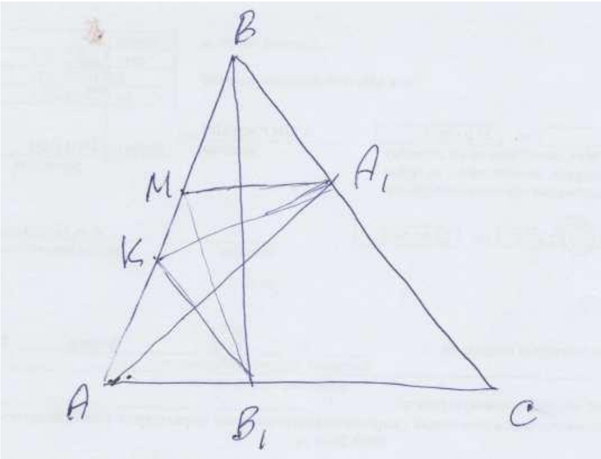
имеющее три корня: $x_1 = 0, x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2}$

Задание 3.

В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. На стороне AB выбраны точки K, M так, что $B_1K \parallel BC$, $MA_1 \parallel AC$. Докажите, что $\angle AA_1K = \angle BB_1M$.

Решение

Заметим, что треугольники MBA_1 AKB_1 подобны треугольнику ABC. Отсюда следует равенство их углов, в частности $\angle AKB_1 = \angle B$, $\angle MA_1B = \angle C$.



Треугольник A_1B_1C также подобен треугольнику ABC, поскольку $A_1C = AC\cdot\cos\angle C$, $B_1C = BC\cdot\cos\angle C$, а угол C у них общий. Поэтому $\angle B_1A_1C = \angle A$. Поэтому $\angle MA_1B = \pi - \angle A - \angle C = \angle B$. Следовательно, сумма углов $\angle MA_1B_1$ и $\angle MKB_1$ равна π. Отсюда следует, что около четырёхугольника KMA_1B_1 можно описать окружность. Отсюда следует равенство углов $\angle MA_1K$ и $\angle MB_1K$ как вписанных, опирающихся на одну дугу.

Углы AA_1M и BB_1K также равны, так как это углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Вычтя из этой пары равных углов предыдущую пару равных углов, получим требуемое равенство.

Задание 4.

Найти наибольшее и наименьшее значение выражения

$$\frac{|x+y-2z|+|z+y-2x|+|x+z-2y|}{|x-y|+|y-z|+|z-x|}$$

Решение

Поскольку выражение симметрично относительно x, y, z, можно считать, что $x \le y \le z$. Тогда можно раскрыть модули:

$$|x-y| = y-x, |y-z| = z-y, |z-x| = z-x$$

$$|x+y-2z| = 2z-x-y, |z+y-2x| = z+y-2x$$

Еще один модуль мы пока раскрыть не можем. Перепишем его в виде

$$|x+z-2y| = |(z-y)-(y-x)|$$

Наше выражение равно

$$\frac{3(z-x)+|(z-y)-(y-x)|}{2(z-x)}$$

Введем теперь следующие обозначения: $z-x = a, y-x = ta$. Тогда $0 \le t \le 1$ и $z-y = (1-t)a$. Подставив и сократив на $a > 0$, получим, что исследуемое выражение равно

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}|1-2t|$$

При $t = \frac{1}{2}$ выражение минимально и равно $\frac{3}{2}$.

При $t = 0$ и $t = 1$ выражение максимально и равно 2.

Задание 5.

Известно, что

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 9 \\ c^2+d^2 = 16 \\ ad+bc \ge 12 \end{cases}$$

Найти максимально возможное значение $b+d$.

Решение

Сделаем тригометрическую замену:

$$a = 3\sin\alpha, b = 3\cos\alpha$$

$$c = 4\sin\beta,\ d = 4\cos\beta$$

Тогда $b+d$

$$ad+bc = 12\sin\alpha\cos\beta + 12\cos\alpha\sin\beta = 12\sin(\alpha+\beta)$$

Из условия $ad+bc \ge 12$ теперь следует, что $\sin(\alpha+\beta) = 1$ и поэтому можно считать, что

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Выражение $b + d$ равно

$$b + d = 3\cos\alpha + 4\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 3\cos\alpha + 4\sin\alpha$$

Вводя дополнительный угол, получим, что

$$b + d = \sqrt{3^2 + 4^2}\cos(\alpha - \varphi)$$

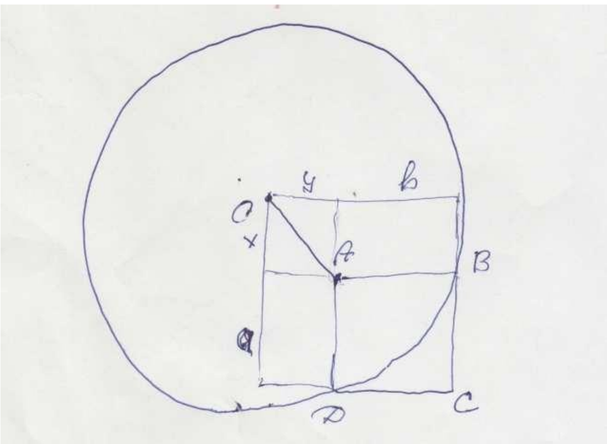
и его максимальное значение равно 5.

Задание 6.

Дана окружность ω радиуса R и точка A внутри окружности (расстояние от точки A до центра окружности равно d). Найти геометрическое место точек C таких, что найдутся точки B и D на окружности ω такие, что $ABCD$ – прямоугольник.

Решение

Смотрите рисунок.



Из обозначений на рисунке ясно, что $\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 = x^2 + y^2, \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 = x^2 + (y+b)^2, \left|\overrightarrow{OC}\right|^2 = (x+a)^2 + (y+b)^2, \left|\overrightarrow{OD}\right|^2 = (x+a)^2 + y^2$. Следовательно, $\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OD}\right|^2, \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 = d^2, \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OD}\right|^2 = R^2$. Поэтому $\left|\overrightarrow{OC}\right|^2 = 2R^2 - d^2$ и точка C лежит на окружности радиуса $\sqrt{2R^2 - d^2}$ с центром в точке O.

Обратно, по любой точке C на этой окружности можно построить требуемый прямоугольник. Для этого следует построить окружность на отрезке AC как на диаметре. Точки B и D – точки пересечения этой окружности с исходной окружностью ω.

Задание 7.

Решить уравнение

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{5+x}}} = x+3$$

Решение

Сделаем тригонометрическую замену $x = 2\cos\alpha - 3$, при этом будем считать, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$5 + x = 2 + 2\cos\alpha = 4\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

Подставив в уравнение, получим

$$\sqrt{2+\sqrt{2-2\sin\frac{\alpha}{4}}} = 2\cos\alpha$$

Снова применяем формулу понижения степени $1 - \cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin^2\frac{\alpha}{4}$, получим

$$\sqrt{2-2\sin\frac{\alpha}{4}} = 2\cos\alpha$$

Предварительно перейдя к дополнительному углу

$$\sin\frac{\alpha}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right)$$

снова применим ту же формулу, получим

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{8}\right) = 2\cos\alpha$$

Решая получившееся тригонометрическое уравнение и отбирая корень, лежащий в первой четверти, находим $\alpha = \frac{2\pi}{9}$, поэтому $x = 2\cos\frac{2\pi}{9} - 3$.

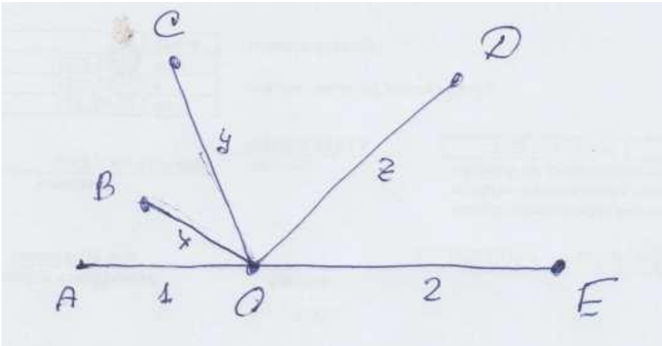
Задание 8.

Найти наименьшее значение функции

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}+\sqrt{z^2-2z+4}$$

Решение

Эта задача имеет геометрическое решение – смотрите рисунок.



Как следует из теоремы косинусов, значение функции $f(x,y,z)$ равно длине ломаной $ABCDE$, где углы равны: $\angle AOB=\angle BOC=30°, \angle COD=\angle DOE=60°$. Длины отрезков указаны на рисунке.

Кратчайшая ломаная – прямая. Длина отрезка AE равна 3, это и есть искомый минимум.