Многопрофильная олимпиада РТУ МИРЭА
Заключительный этап
Математика 11 класс
Вариант 1

Задание 1.

Барон Мюнхаузен утверждает, что у него в записной книжке записаны 1000 натуральных чисел, из которых любые два имеют общий делитель больше единицы, а любые три – нет. Обязательно ли барон врет?

Решение

Такой набор чисел существует. Опишем алгоритм его построения.

1. Начнем с набора из 2021 единицы.
2. Составим список всех возможных троек из этих чисел. Число таких троек равно $N = C_{2021}^{3}$, но для нас важно только то, что число таких троек конечно.

3. Составим список из первых N простых чисел $p_1, \ldots p_N$.
4. Все три числа в тройке с номером k домножим на p_k, и сделаем это во всех тройках.

Полученный в результате набор чисел удовлетворяет условиям задачи. Действительно, любая тройка чисел есть в списке под каким-то номером k, и поэтому имеет общий множитель p_k. А любая четвертка чисел взаимно проста, поскольку каждое простое число p_k присутствует в качестве сомножителя только в трех числах.

Задание 2.

Решить уравнение:

$$\frac{\log_2(x^2 - x + 5)}{x^2 - x + 5} = \frac{3}{8}$$

Решение

Обозначив $t = x^2 - 2x + 6$, получим уравнение

$$\frac{log_2 t}{t} = \frac{3}{8},$$

имеющее легко угадываемый корень $t = 8$. Осталось доказать, что других корней нет.

Рассмотрим функцию

$$f(t) = \frac{log_2 t}{t}$$

Ее производная равна

$$f'(t) = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{\ln t}{t^2}\right)$$

Она обращается в нуль при $t = e$, а при больших значениях t отрицательна. Но $t = x^2 - 2x + 6 = (x+1)^2 + 5 \geq 5$, и в области $t \geq 5$ функция $f(t)$ монотонно убывает. Поэтому решение $t = 8$ единственно.

Решая уравнение $x^2 - 2x + 6 = 8$, найдем корни $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$.

Задание 3.

Доказать, что $\log_{105}^2 5 + \log_{105}^2 7 + \log_{105}^2 3 > \frac{1}{3}$

Решение

Обозначим $x = log_{30}2, y = log_{30}3$ и $z = log_{30}5$ и заметим, что $x + y + z = 1$. Теперь остается только доказать, что сумма квадратов таких чисел больше $1/3$.

Существует много способов доказательства этого утверждения. Здесь будет изложено доказательство, не требующее знаний аналитической геометрии или других элементов высшей математики. Оно основано на таком факте: если сумма чисел постоянна, то их сумма квадратов минимальна, когда все числа равны. Действительно, если, скажем $x \neq y$, то сумму квадратов можно уменьшить, взяв вместо x и y два раза их полусумму, и сумма при этом не изменится. Доказательство просто:

$$x^2 + y^2 \geq \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} = 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

Поэтому сумма квадратов минимальная при $x = y = z = \frac{1}{3}$ и равна $\frac{1}{3}$.

Неравенство строгое ($>$, а не $\geq$), поскольку числа x, y, z различны.

Задание 4.

Найти наибольшее и наименьшее значение выражения

$$\frac{|x + y - 2z| + |z + y - 2x| + |x + z - 2y|}{|x - y| + |y - z| + |z - x|}$$

Решение

Поскольку выражение симметрично относительно x, y, z, можно считать, что $x \leq y \leq z$. Тогда можно раскрыть модули:

$$|x-y| = y-x, |y-z| = z-y, |z-x| = z-x$$

$$|x+y-2z| = 2z-x-y, |z+y-2x| = z+y-2x$$

Еще один модуль мы пока раскрыть не можем. Перепишем его в виде

$$|x+z-2y| = |(z-y)-(y-x)|$$

Наше выражение равно

$$\frac{3(z-x)+|(z-y)-(y-x)|}{2(z-x)}$$

Введем теперь следующие обозначения: $z-x=a, y-x=ta$. Тогда $0 \leq t \leq 1$ и $z-y=(1-t)a$. Подставив и сократив на $a>0$, получим, что исследуемое выражение равно

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}|1-2t|$$

При $t = 1/2$ выражение минимально и равно $3/2$.

При $t=0$ и $t=1$ выражение максимально и равно 2.

Задание 5.

Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y} = \log_3 \dfrac{y}{x} \\ 2^{x+2}+8^y = 5 \cdot 4^y \end{cases}$$

Решение

Перепишем первое уравнение в виде

$$\sqrt{x}+log_3 x = \sqrt{y}+log_3 y$$

В силу монотонности функции $f(x) = \sqrt{t}+log_3 t$ отсюда следует, что $x=y$.

Подставляя во второе уравнение, получим

$$4*2^x+2^{3x}-5*2^{2x}=0$$

Обозначив $t=2^x$, получим кубическое уравнение

$$t^3-5t^2+4t=0$$

Его корни:

$t = 0$ – этот корень посторонний, поскольку $t = 2^x > 0$;

$t = 1$ – этот корень тоже посторонний, поскольку тогда $x = 0$ не принадлежит области определения логарифма.

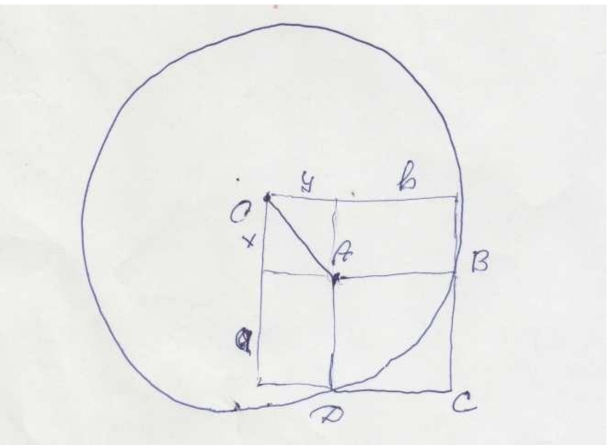
$t = 4$ – этот корень подходит и дает единственное решение задачи $x = 2, y = 2$.

Задание 6.

Дана окружность ω радиуса R и точка A внутри окружности (расстояние от точки A до центра окружности равно d). Найти геометрическое место точек C таких, что найдутся точки B и D на окружности ω такие, что $ABCD$ – прямоугольник.

Решение

Смотрите рисунок



Из обозначений на рисунке ясно, что $|\overrightarrow{OA}|^2 = x^2 + y^2, |\overrightarrow{OB}|^2 = x^2 + (y+b)^2, |\overrightarrow{OC}|^2 = (x+a)^2 + (y+b)^2, |\overrightarrow{OD}|^2 = (x+a)^2 + y^2$. Следовательно, $|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OD}|^2, |\overrightarrow{OA}|^2 = d^2, |\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OD}|^2 = R^2, |\overrightarrow{OC}|^2 = 2R^2 - d^2$ и точка C лежит на окружности радиуса $\sqrt{2R^2 - d^2}$ с центром в точке O.

Обратно, по любой точке C на этой окружности можно построить требуемый прямоугольник. Для этого следует построить окружность на отрезке AC как на диаметре. Точки B и D – точки пересечения этой окружности с исходной окружностью ω.

Многопрофильная олимпиада РТУ МИРЭА
Заключительный этап
Математика 11 класс
Вариант 1

Задание 7.

Про положительные числа a, b, c, d известно, что $abcd > a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Докажите, что $abcd > a + b + c + d + 8$.

Решение

Воспользовавшись неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом, получим

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} = 4\sqrt{abcd}$$

Учитывая, что $abcd$ положительно, из неравенства $abcd > \ 4\sqrt{abcd}$ получим, что $\sqrt{abcd} > 4\ abcd > 16$.

Еще воспользуемся классическим неравенством Коши – Буняковского. Оно гласит, что для любых векторов $\vec{x}, \vec{y}$ их скалярная произведение $(\vec{x}, \vec{y})$ удовлетворяет неравенству

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \left||\vec{x}|\right| * \left||\vec{y}|\right|$$

Взяв $\vec{x} = (a, b, c, d)$ $\vec{y} = (1,1,1,1)$, получим

$a + b + c + d \leq 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

Теперь, пользуясь тем, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < \ abcd$ и тем, что $\sqrt{abcd} > 4$, получим

$$a + b + c + d < 2\sqrt{abcd} < \frac{1}{2}abcd$$

Итак, доказано, что

$$\frac{1}{2}abcd = a + b + c + d$$

А из ранее доказанного следует, что

$$\frac{1}{2}abcd > 8$$

Осталось сложить два полученных неравенства.

Задание 8.

Решить уравнение

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}=x$$

Решение

Сделаем тригонометрическую замену $x = 2\cos\alpha$, при этом будем считать, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$2 + x = 2 + 2\cos\alpha = 4\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

Подставив в уравнение, получим

$$\sqrt{2+\sqrt{2-2\cos\frac{\alpha}{2}}} = 2\cos\alpha$$

Снова применяем формулу понижения степени $1 - \cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin^4\frac{\alpha}{4}$, получим

$$\sqrt{2-2\sin\frac{\alpha}{4}} = 2\cos\alpha$$

Предварительно перейдя к дополнительному углу

$$\sin\frac{\alpha}{4} = \cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4})$$

снова применим ту же формулу, получим

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{8}\right) = 2\cos\alpha$$

Решая получившееся тригонометрическое уравнение и отбирая корень, лежащий в первой четверти, находим $\alpha = \frac{2\pi}{9}$, поэтому $x = 2\cos\frac{2\pi}{9}$.