



Многопрофильная
олимпиада РТУ МИРЭА
Заключительный этап
Математика 9 класс
Вариант 1

Задание 1.

Петя хочет из натуральных чисел от 1 до 100 составить 50 непересекающихся пар чисел. После этого Вася для каждой пары подсчитывает положительную разность чисел этой пары и сложит 50 полученных чисел. Как Пете надо разбить на пары, если он хочет, чтобы у Васи в результате получилось 2500?

Решение

Достаточно взять пары с разностью 50: 1 и 51, 2 и 52 и так далее. Сумма разностей будет равна $50 \cdot 50 = 2500$.

Задание 2.

Решить систему

$$\begin{cases} x^3 - 5x^2 + 6x = y^2 \\ y^3 - 5y^2 + 6y = x^2 \end{cases}$$

Решение

Вычтем второе уравнение из первого. Получим

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 2) = -(x - y)(x + y)$$

следовательно, либо $x = y$, либо

$$x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$$

Докажем, что последнее уравнение решений не имеет. Для этого рассмотрим его как квадратное уравнение относительно x с параметром y :

$$x^2 + x(y - 2) + y^2 - 2y + 2 = 0$$

и найдем его дискриминант:

$$D = y^2 - 4y + 4 - 4y^2 + 8y - 8 = -3y^2 + 4y - 4$$

Этот квадратный трехчлен отрицателен при всех значениях y , потому что его дискриминант равен -32 . Поэтому для всех решений исходной системы верно $x = y$. Подставив, получим уравнение

$$x^3 - 4x^2 + 2x = 0$$

имеющее три корня: $x_1 = 0, x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2}$

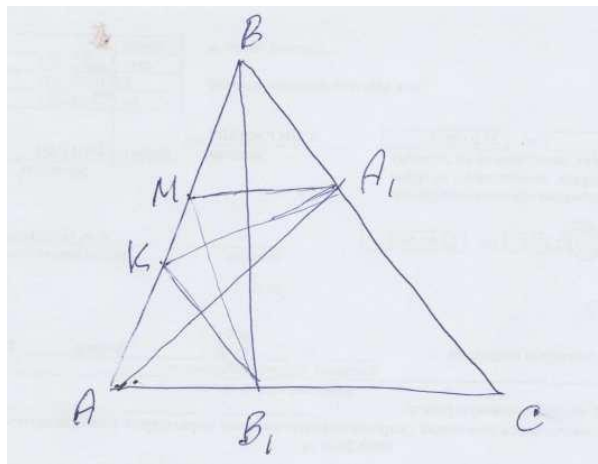
Многопрофильная
олимпиада РТУ МИРЭА
Заключительный этап
Математика 9 класс
Вариант 1

Задание 3.

В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . На стороне AB выбраны точки K, M так, что $B_1K \parallel BC$, $MA_1 \parallel AC$. Докажите, что $\angle AA_1K = \angle BB_1M$.

Решение

Заметим, что треугольники MBA_1 AKB_1 подобны треугольнику ABC . Отсюда следует равенство их углов, в частности $\angle AKB_1 = \angle B$, $\angle MA_1B = \angle C$.



Треугольник A_1B_1C также подобен треугольнику ABC , поскольку $A_1C = AC \cdot \cos \angle C$, $B_1C = BC \cdot \cos \angle C$, а угол C у них общий. Поэтому $\angle B_1A_1C = \angle A$. Поэтому $\angle MA_1B = \pi - \angle A - \angle C = \angle B$. Следовательно, сумма углов $\angle MA_1B_1$ и $\angle MKB_1$ равна π . Отсюда следует, что около четырёхугольника KMA_1B_1 можно описать окружность. Отсюда следует равенство углов $\angle MA_1K$ и $\angle MB_1K$ как вписанных, опирающихся на одну дугу.

Углы AA_1M и BB_1K также равны, так как это углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Вычтя из этой пары равных углов предыдущую пару равных углов, получим требуемое равенство.

Задание 4.

Найти наибольшее и наименьшее значение выражения

$$\frac{|x + y - 2z| + |z + y - 2x| + |x + z - 2y|}{|x - y| + |y - z| + |z - x|}$$



Многопрофильная
олимпиада РТУ МИРЭА
Заключительный этап
Математика 9 класс
Вариант 1

Решение

Поскольку выражение симметрично относительно x, y, z , можно считать, что $x \leq y \leq z$. Тогда можно раскрыть модули:

$$|x - y| = y - x, |y - z| = z - y, |z - x| = z - x$$
$$|x + y - 2z| = 2z - x - y, |z + y - 2x| = z + y - 2x$$

Еще один модуль мы пока раскрыть не можем. Перепишем его в виде

$$|x + z - 2y| = |(z - y) - (y - x)|$$

Наше выражение равно

$$\frac{3(z - x) + |(z - y) - (y - x)|}{2(z - x)}$$

Введем теперь следующие обозначения: $z - x = a, y - x = ta$. Тогда $0 \leq t \leq 1$ и $z - y = (1 - t)a$. Подставив и сократив на $a > 0$, получим, что исследуемое выражение равно

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}|1 - 2t|$$

При $t = \frac{1}{2}$ выражение минимально и равно $\frac{3}{2}$.

При $t = 0$ и $t = 1$ выражение максимально и равно 2.

Задание 5.

Известно, что

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ c^2 + d^2 = 16 \\ ad + bc \geq 12 \end{cases}$$

Найти максимально возможное значение $b + d$.

Решение

Сделаем тригонометрическую замену:

$$a = 3 \sin \alpha, b = 3 \cos \alpha$$
$$c = 4 \sin \beta, d = 4 \cos \beta$$

Тогда $b + d$

$$ad + bc = 12 \sin \alpha \cos \beta + 12 \cos \alpha \sin \beta = 12 \sin(\alpha + \beta)$$

Из условия $ad + bc \geq 12$ теперь следует, что $\sin(\alpha + \beta) = 1$ и поэтому можно считать, что

Многопрофильная
олимпиада РТУ МИРЭА
Заключительный этап
Математика 9 класс
Вариант 1

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Выражение $b + d$ равно

$$b + d = 3 \cos \alpha + 4 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 3 \cos \alpha + 4 \sin \alpha$$

Вводя дополнительный угол, получим, что

$$b + d = \sqrt{3^2 + 4^2} \cos(\alpha - \varphi)$$

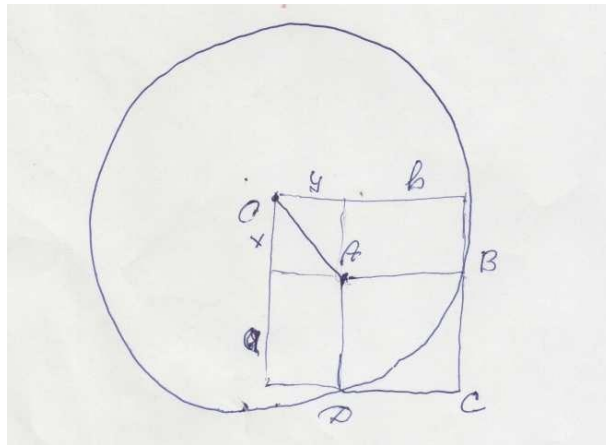
и его максимальное значение равно 5.

Задание 6.

Дана окружность ω радиуса R и точка A внутри окружности (расстояние от точки A до центра окружности равно d). Найти геометрическое место точек C таких, что найдутся точки B и D на окружности ω такие, что $ABCD$ – прямоугольник.

Решение

Смотрите рисунок.



Из обозначений на рисунке ясно, что $|\vec{OA}|^2 = x^2 + y^2$, $|\vec{OB}|^2 = x^2 + (y + b)^2$, $|\vec{OC}|^2 = (x + a)^2 + (y + b)^2$, $|\vec{OD}|^2 = (x + a)^2 + y^2$. Следовательно, $|\vec{OA}|^2 + |\vec{OC}|^2 = |\vec{OB}|^2 + |\vec{OD}|^2$, $|\vec{OA}|^2 = d^2$, $|\vec{OB}|^2 = |\vec{OD}|^2 = R^2$. Поэтому $|\vec{OC}|^2 = 2R^2 - d^2$ и точка C лежит на окружности радиуса $\sqrt{2R^2 - d^2}$ с центром в точке O .

Обратно, по любой точке C на этой окружности можно построить требуемый прямоугольник. Для этого следует построить окружность на

отрезке AC как на диаметре. Точки B и D – точки пересечения этой окружности с исходной окружностью ω .

Задание 7.

Решить уравнение

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{5 + x}}} = x + 3$$

Решение

Сделаем тригонометрическую замену $x = 2 \cos \alpha - 3$, при этом будем считать, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$5 + x = 2 + 2 \cos \alpha = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

Подставив в уравнение, получим

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 - 2 \sin \frac{\alpha}{4}}} = 2 \cos \alpha$$

Снова применяем формулу понижения степени $1 - \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{4}$, получим

$$\sqrt{2 - 2 \sin \frac{\alpha}{4}} = 2 \cos \alpha$$

Предварительно перейдя к дополнительному углу

$$\sin \frac{\alpha}{4} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4} \right)$$

снова применим ту же формулу, получим

$$2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{8} \right) = 2 \cos \alpha$$

Решая получившееся тригонометрическое уравнение и отбирая корень, лежащий в первой четверти, находим $\alpha = \frac{2\pi}{9}$, поэтому $x = 2 \cos \frac{2\pi}{9} - 3$.

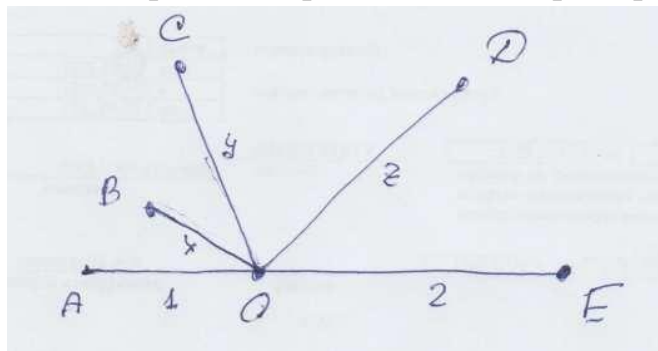
Задание 8.

Найти наименьшее значение функции

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}xy + y^2} + \sqrt{y^2 - yz + z^2} + \sqrt{z^2 - 2z + 4}$$

Решение

Эта задача имеет геометрическое решение – смотрите рисунок.



Как следует из теоремы косинусов, значение функции $f(x, y, z)$ равно длине ломаной $ABCDE$, где углы равны: $\angle AOB = \angle BOC = 30^\circ$, $\angle COD = \angle DOE = 60^\circ$. Длины отрезков указаны на рисунке.

Кратчайшая ломаная – прямая. Длина отрезка AE равна 3, это и есть искомый минимум.