Многопрофильная олимпиада РТУ МИРЭА
Заключительный этап
Физика
Вариант 1

Задание 1.

Харон – крупный спутник Плутона, вращающийся вокруг него практически по круговой орбите. Масса Харона составляет 11,7 % от массы Плутона. Один оборот Харона вокруг Плутона происходит за 6,387 суток. Каким стал бы период обращения Харона вокруг Плутона, если масса Харона вдруг стала бы равной массе Плутона, а расстояние между центрами этих космических объектов осталось бы прежним?

Решение

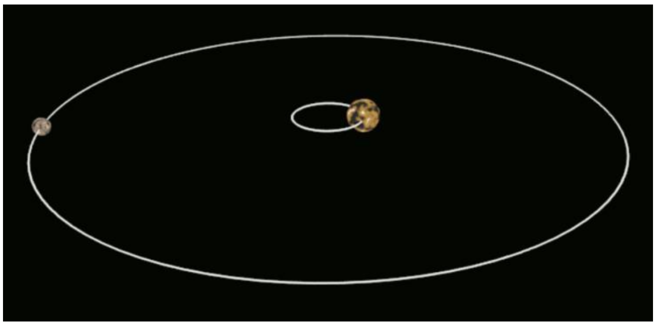
ДАНО:

$m = 0.117\ M$,

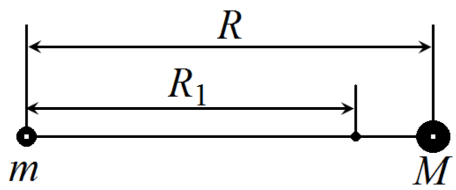
$T_1 = 6.387$ суток.

$T_2 = ?$

В задачах про Землю и Солнце можно считать, что Земля вращается вокруг неподвижного Солнца, так как масса Земли пренебрежимо мала по сравнению с массой Солнца. В нашей задаче благодаря своей относительно большой массе Харон вращается не вокруг самого Плутона, а вокруг их общего центра масс.



Пусть R – расстояние между центрами Плутона и Харона, R_1 – радиус орбиты Харона вокруг центра масс системы Плутон – Харон. Определим



положение центра масс, используя принцип равновесия рычага:

$$\frac{R_1}{R-R_1}=\frac{M}{m}$$
$$R_1 m = RM - R_1 M$$
$$R_1 = R\frac{M}{M+m}$$

Найдём период обращения Харона вокруг общего центра масс, используя силу гравитационного притяжения и приравнивая её к произведению массы Харона на его центростремительное ускорение:

$$F = G\frac{Mm}{R^2}$$
$$F = m * a_ц = \frac{v_1^2}{R_1}$$
$$G\frac{Mm}{R_1} = \frac{v^2}{R_1}$$
$$G\frac{M}{R^2} = \frac{v_1^2}{R}\frac{M+m}{M}$$
$$G\frac{M}{R} = v_1^2\frac{M+m}{M}$$
$$v_1 = \sqrt{G\frac{M^2}{R(M+m)}}$$
$$T_1 = \frac{2\pi R_1}{v_1} = 2\pi R\frac{M}{M+m}\sqrt{\frac{R(M+m)}{GM^2}} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{G(M+m)}}$$

Пусть теперь Харон стал такой же массы M, как и Плутон, а расстояние между их центрами осталось равным R. Тогда эти два тела будут вращаться друг вокруг друга совершенно равноправно, а расстояние R теперь будет являться <u>диаметром их новой</u> <u>орбиты</u>; соответственно, радиус новой орбиты $R2 = R/2$.

$$F = G\frac{M^2}{R^2}$$
$$F = M\frac{v_2^2}{R/2}$$

$$G\frac{M^2}{R^2} = M\frac{v_2^2}{R/2}$$

$$G\frac{M}{R^2} = \frac{2v_2^2}{R}$$

$$G\frac{M}{2R} = v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{G\frac{M}{2R}}$$

$$T_2 = \frac{2\pi R_2}{v_2} = 2\pi\frac{R}{2}\sqrt{\frac{2R}{GM}} = \pi R\sqrt{\frac{2R}{GM}} = T_1 * \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(M+m)}{M}} = T_1\sqrt{\frac{M+m}{2M}}$$

$$T_2 = 6.387 \text{ суток} * \sqrt{\frac{1+0.117}{2*1}} = 4.773 \text{ суток}$$

Ответ: $T_1\sqrt{\frac{(M+m)}{2M}} = 4.773$ суток

Задание 2.

На горизонтальном столе лежит брусок массой $M = 3$ кг, на котором находится брусок $m = 1$ кг. Коэффициент трения между брусками $\mu_1 = 1/4$, коэффициент трения между бруском и столом $\mu_2 = 1/5$. На верхний брусок в горизонтальном направлении действует сила F. Определить значение силы F, при котором верхний брусок начнёт проскальзывать относительно нижнего.

Решение

ДАНО:

$m = 1$ кг,

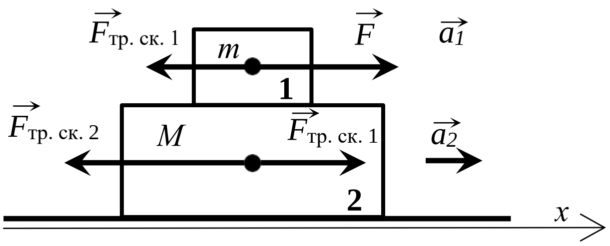
$M = 3$ кг,

$\mu1 = 1/4 = 0.25, \mu2 = 1/5 = 0.2.$

F = ?

Верхний брусок массой m будем считать бруском № 1, нижний брусок массой M

будем считать бруском № 2. Нарисуем все силы, действующие на бруски:



Запишем второй закон Ньютона для каждого из брусков в проекциях на ось x:

$$ma_1 = F - F_{\text{тр.ск.1}}$$

$$Ma_2 = F_{\text{тр.ск.1}} - F_{\text{тр.ск.2}}$$

$$ma_1 = F - \mu_1 mg - \mu_2 (M + m)g$$

$$a_1 = \frac{F - \mu_1 mg}{m}$$

$$a_2 = \mu_1 \frac{m}{M} g - \mu_2 \frac{M + m}{M} g$$

Верхний брусок (брусок № 1) будет проскальзывать по нижнему бруску (бруску № 2),если $a1 > a2$. Проскальзывание начнётся при $a1 = a2$.

$$\mu_1 \frac{m}{M} g - \mu_2 \frac{M + m}{M} g = \frac{F - \mu_1 mg}{m}$$

$$F = m * \left[\mu_1 g \left(1 + \frac{m}{M}\right) - \mu_2 g \left(1 + \frac{m}{M}\right)\right] = mg(1 + \frac{m}{M})(\mu_1 - \mu_2)$$

$$F = 1\text{ кг} * 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} * \frac{4}{3} * (0.25 - 0.2) = 0.667\ H$$

Казалось бы, задача решена. Однако рано радоваться: полученное решение является фиктивным! В самом деле, найдём значение проекции ускорения $a = a1 = a2$ и увидим, что она отрицательна. Но по смыслу задачи ускорение не может быть направлено в сторону, обратную действию силы F. Дело в том, что найденная минимальная сила F меньше силы

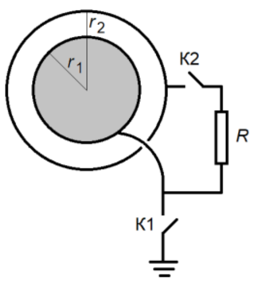
трения скольжения верхнего бруска по нижнему $F_{\text{тр. ск. 1}} = 2.5$ Н. При этом сила трения скольжения превращается в силу трения покоя $F_{\text{тр. пок. 1}} \leq 2.5$ Н, которая точно уравновешивает силу F, и бруски не движутся. И только если $F > 2.5$ Н, верхний брусок придёт в движение. Он будет действовать на нижний брусок с силой $F_{\text{тр. ск. 1}} = 2.5$ Н и увлекать его за собой, но движению нижнего бруска будет мешать $F_{\text{тр. пок. 2}} \leq 8$ Н, следовательно, нижний брусок останется неподвижным.

Первоначальные же рассуждения оказались неверными из-за того, что мы изначально решили, будто силы трения будут именно силами трения скольжения. Однако при таких значениях масс и коэффициентов трения, при которых $F_{\text{тр. ск. 1}} > F_{\text{тр. ск. 2}}$, первоначальный способ будет давать правильное решение.

Ответ: $F > 2.5$ Н.

Задание 3.

Металлический шар радиуса $r_1 = 4$ см находится внутри концентрической тонкой металлической сферы радиуса $r_2 = 10$ см. Через маленькое отверстие в сфере проходит длинный провод, с помощью которого шар заземлён. Ключ К1 замкнут, а ключ К2 разомкнут. На сферу помещают заряд $q = 5$ мкКл. После этого ключ К1 размыкают, а ключ К2 замыкают, соединяя шар и сферу через резистор. Найти количество теплоты, выделившееся на резисторе.



Решение

ДАНО:

$r1$ = 4 см = 0.04 м,

$r2$ = 10 см = 0.1 м,

Q = 5 мкКл = 5·10^{-6} Кл.

$\tilde{Q}$= ?

Поскольку металлический шар заземлён, то его потенциал должен быть равен потенциалу Земли, а это нуль. Потенциал шара согласно принципу суперпозиции полей складывается из двух потенциалов: потенциала поля, созданного зарядами на шаре, φ1 и потенциала поля, созданного зарядами на сфере, φ2, которые в сумме должны дать нуль. Потенциал поля, созданного зарядами на сфере, одинаков во всех точках внутри сферы и на поверхности сферы и равен $k\frac{Q}{r^2}$. Земля является неограниченным резервуаром электронов, которые будут натекать на заземлённый шар до тех пор, пока не создадут на нём заряд q.

$$\varphi_{\text{ш}} = k\frac{q}{r_1} + k\frac{Q}{r_2} = 0$$

$$q = -Q\frac{r_1}{r_2} < 0$$

Суммарный заряд сферы и шара будет составлять

$$Q + q = Q(1 - \frac{r_1}{r_2})$$

Все величины после замыкания ключа К2 (то есть для конечной ситуации) мы будемотмечать штрихами.

После соединения шара и сферы проводником их потенциалы уравняются:

$$\varphi'_{\text{ш}} = \varphi'_{\text{сф}}$$

$$\varphi'_{\text{ш}} = k\frac{q'}{r_1} + k\frac{Q'}{r_2}, \varphi'_{\text{сф}} = k\frac{q'}{r_2} + k\frac{Q'}{r_2}$$

$\varphi'_{\text{ш}} = \varphi'_{\text{сф}}$ *только если* $q' = 0$.

При этом суммарный заряд шара и сферы сохранится:

$$Q' + q' = Q + q$$

$$Q' = Q + q$$

$$Q' = Q - Q\frac{r_1}{r_2} = Q\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) = Q\frac{r_2 - r_1}{r_2} > 0.$$

Итак, в начальный момент времени на сфере был заряд $Q > 0$, на шаре был заряд $-0.4Q < 0$. В конце на сфере остался заряд $0.6Q > 0$, на шаре остался заряд 0. Перераспределение заряда вызовет ток, протекающий через резистор, следовательно, поле совершит работу по перемещению заряда A, которая равна джоулевой теплоте, выделившейся в резисторе $\tilde{Q}$. Энергия, выделившаяся в форме теплоты, до этого существовала в форме потенциальной энергии зарядов в электрическом поле W. Заряды, содержащиеся на шаре, обладали в электрическом поле энергией $W_{ш}$, а заряды на сфере обладали в электрическом поле энергией $W_{сф}$. Часть этой энергии выделилась в виде тепла на резисторе, а часть осталась в форме потенциальной энергии зарядов $W_{ш}'$ и $W_{сф}'$. Запишем закон сохранения полной энергии:

$$W_{ш} + W_{сф} = A + W_{ш}' + W_{сф}'$$

$$A = W_{ш} + W_{сф} - W_{ш}' - W_{сф}'$$

$$W_{ш} = \frac{1}{2}\varphi_{сф} * Q = \frac{1}{2}\left(k\frac{q'}{r_2} + k\frac{Q'}{r_2}\right) * Q = k\frac{Q}{2r_2}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) * Q = k\frac{Q^2}{2r_2^2}(r_2 - r_1)$$

$$W_{ш}' = \frac{1}{2}\varphi_{ш}' * q' = \frac{1}{2}\varphi_{ш}' * 0 = 0$$

$$W_{сф}' = \frac{1}{2}\varphi_{сф}' * Q' = \frac{1}{2}\left(k\frac{q'}{r_2} + k\frac{Q'}{r_2}\right) * Q' = k\frac{Q'^2}{2r_2} = k\frac{Q^2}{2r_2^2}\frac{(r_2 - r_1)}{r_2^2}$$

$$\tilde{Q} = A = W_{сф} - W_{сф}' = k\frac{Q^2}{2r_2^2}(r_2 - r_1) - k\frac{Q^2}{2r_2^2}\frac{(r_2 - r_1)}{r_2^2}$$

$$= k\frac{Q^2}{2r_2^2} * [r_2 - r_1 - \frac{(r_2 - r_1)}{r_2^2}]$$

$$= k\frac{Q^2}{2r_2^2} * [\frac{r_2^2 - r_1 r_2 - r_2^2 + 2r_1 r_2 - r_1^2}{r_2}] = k\frac{Q^2}{2r_2^2} * [\frac{r_1 r_2 - r_1^2}{r_2}]$$

$$= k\frac{Q^2}{2r_2^2} r_1(r_2 - r_1)$$

$$\tilde{Q} = 9 * 10^9 * \frac{(5 * 10^{-6})^2 * 0.04}{2 * 0.1^3} * 0.06 = 0.27\text{ Дж}$$

Ответ: 0.27 Дж

Задание 4.

Переменное напряжение в цепи представляет из себя последовательность прямоугольных импульсов амплитудой 10 В с чередующейся полярностью (положительных и отрицательных). Длительность каждого импульса 600 мкс, период чередования импульсов 4 мс. Какое значение покажет вольтметр с малым быстродействием, который находится в режиме измерения переменного напряжения, подключённый к этой цепи?

Решение

ДАНО:

U_0 = 10 В,

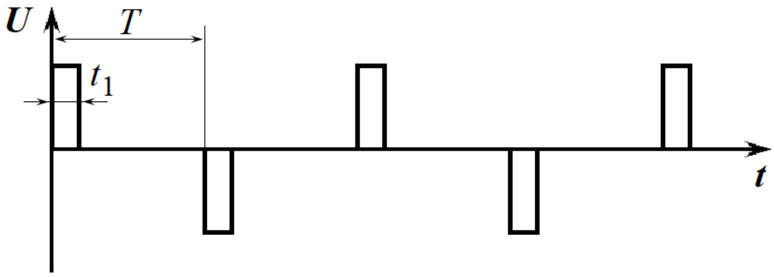
t_1 = 600 мкс = $600 \cdot 10^{-6}$ с = $6 \cdot 10^{-4}$ с,

T = 4 мс = $4 \cdot 10^{-3}$ с.

/R

$U_{ср. кв.}$ = ?

Изобразим в соответствии с условием задачи форму переменного напряжения.



Вольтметр, находящийся в режиме измерения переменного напряжения, измеряет <u>действующее значение</u> переменного напряжения. <u>Действующее значение</u> переменного напряжения равно значению такого постоянного напряжения, которое обеспечивает такую же мощность в цепи, как и переменное. Действующее значение – это среднеквадратичное значение (не среднее значение, иначе в домашней электрической сети для синусоидального сигнала вольтметр показывал бы нуль, а он показывает около 220 В). Поскольку электрическая мощность, выраженная через напряжение, равна U^2/R, становится понятным, что нужно использовать среднеквадратичное значение. Чтобы вычислить среднеквадратичное значение, нужно возвести переменный сигнал в квадрат, после чего усреднить его по времени и извлечь квадратный корень. При возведении прямоугольного сигнала в квадрат его прямоугольная форма сохраняется.

Получаем следующее: в течение времени $t1$ = 600 мкс квадрат амплитудынапряжения составляет 100 В^2, в течение оставшегося времени $t2 = T - t1$ квадрат амплитуды напряжения составляет нуль. Далее следует импульс отрицательного напряжения, однако при возведении сигнала в квадрат получаем снова 100 В^2 в течение времени $t1$ = 600 мкс и нуль в течение оставшейся части периода сигнала.

$$\langle U^2 \rangle = \frac{U_0^2 * t_1 + 0 * t_2}{t_1 + t_2} = \frac{U_0^2 * t_1}{T} = \frac{100\ \text{В}^2 * 600\ \text{мкс}}{4000\ \text{мкс}} = 15\ \text{В}^2$$

$$U_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\langle U^2 \rangle} = \sqrt{\frac{U_0^2 * t_1}{T}} = U_0 \sqrt{\frac{t_1}{T}} = 3.87\ \text{В}$$

Ответ: 3.87 В

Задание 5.

Под водой горизонтально расположили плоское зеркало. Стоящий над водой и смотрящий вертикально вниз человек видит своё отражение на расстоянии l = 4,00 м (расстояние между головой человека и головой отражения). Голова человека находится на высоте h_1 = 1,70 м над поверхностью воды. Показатель преломления воды n = 1,33. На какой глубине h_2 лежит зеркало?

Решение

ДАНО:

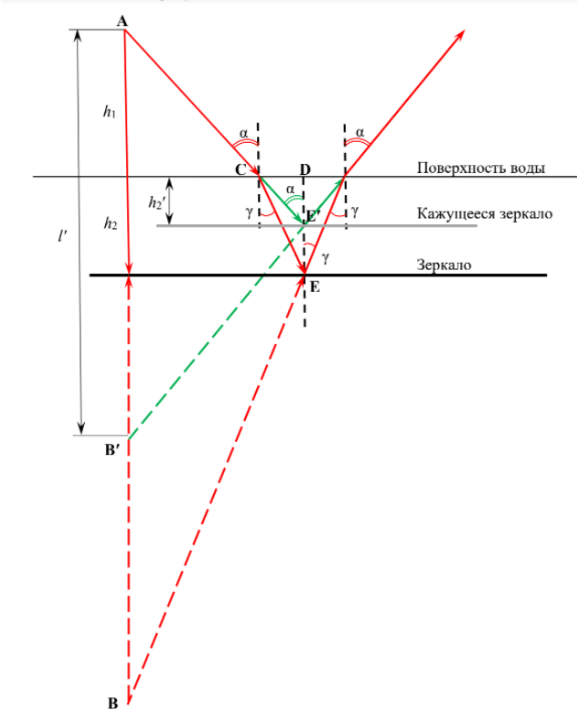
h_1 = 1,70 м,

l' = 4,00 м,

n = 1,33.

h_2 = ?

Сделаем рисунок к задаче.



Поскольку изображение образуется на пересечении лучей, используем для рисунка два луча, исходящих от головы человека (точка A): один луч идёт вертикально внизперпендикулярно поверхности воды, отражается от зеркала и возвращается обратно, попадая в глаз человека. Второй луч идёт *почти* вертикально и падает на поверхность воды под очень малым углом α (на рисунке для удобства этот угол изображён сильно увеличенным, но на самом деле α ≈ 0). Этот луч преломляется при переходе через границу раздела воздух/вода и распространяется дальше под углом преломления γ, который тоже очень мал (γ ≈ 0), отражается от зеркала, выходит из воды, снова испытывая преломление, и попадает в другой глаз человека. Оба луча возвращаются к человеку, поскольку распространяются по очень близким траекториям. Точка B показывает истинное положение головы отражения, в этой точке пересекаются воображаемые продолжения лучей, отразившихся от зеркала. Человек оценивает расстояние до головы отражения по углу расходимости лучей, попавших ему в глаза. Однако глаз воспринимает все лучи так, как будто они распространяются прямолинейно. Глаз «не знает», что в действительности лучи испытали преломление, поэтому человеку кажется, что до него доходят лучи от точки B′ (эти лучи обозначены зелёным цветом). Точка B′ показывает кажущееся положение головы отражения, и человек по углу α «видит» расстояние $l' = 4$ м между точками A и B′ (штрихом мы будем обозначать все величины, кажущиеся человеку).

По закону преломления (закону Снеллиуса)

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n}{1} = n$$

$$\sin\alpha = n * \sin\gamma$$

Рассмотрим прямоугольные треугольники CDE и CDE′.

$$\frac{CD}{DE} = \tan\gamma\,, \qquad \frac{CD}{DE'} = \tan\alpha$$

$$\frac{DE}{DE'} = \frac{h_2}{h_2'} = \frac{\tan\alpha}{\tan\gamma}$$

Поскольку углы α и γ очень малы, то sin α ≈ tg α, sin γ ≈ tg γ

$$\frac{h_2}{h_2'} \approx \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n$$

$$h_2' \approx \frac{h_2}{n}$$

Расстояние от точки A до кажущегося зеркала равно расстоянию от кажущегосязеркала до точки B′.

$$l' = 2 * (h_1 + h_2')$$

$$l' \approx 2 * (h_1 + \frac{h_2}{n})$$

$$h_2 \approx n * \left(\frac{l'}{2} - h_1\right) \approx 0{,}40$$

Ответ: 40 см.