Многопрофильная олимпиада РТУ МИРЭА
Отборочный этап
Математика 9-11 класс

Задание 1.

Дано 10 натуральных чисел. Из десяти возможных сумм по девять чисел только 9 оказались различными: 86, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 94, 95. Найти исходные числа.

Задание 2.

Известно, что выполняется равенство $(a + b + c)(ab + ac + bc) = abc$ для чисел a, b, c. Доказать, что сумма каких-то двух чисел равна 0.

Задание 3.

Сравнить $\sqrt{3}\,tg^2\left(arccos\,\frac{7}{10}\right)$ и $4tg\left(arcsin\,\frac{7}{10}\right) + \sqrt{3}$.

Задание 4.

Доказать неравенство $\sqrt{a^2 + ab + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \leq \sqrt{b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc}$.

Задание 5.

Решить уравнение $\sqrt{4 - x} + \sqrt{x - 2} = x^4 - 18x^2 + 83$.

Задание 6.

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём AD - диаметр этой окружности. Сумма неравных углов четырёхугольника при вершинах A и D равна 150°. Точки P и Q - центры окружностей, вписанных в ΔABD и в ΔACD, соответственно. Точка F середина дуги AD, не содержащей точек B и C. Доказать, что треугольник PQF равносторонний.

Задание 7.

Некоторые рыцари короля Артура во время пандемии перессорились друг с другом, но не со всеми, причём часть из них села на самоизоляцию. Действующих рыцарей оставалось всего семь. Известно, что если взять любых шестерых из этих рыцарей, то их можно посадить за круглый стол так, что соседом каждого рыцаря (слева и справа) будет рыцарь, с которым он не поссорился. Доказать, что и всех семерых можно рассадить за круглый стол так, что у каждого рыцаря соседями будут рыцари, с которыми он не ссорился.

Задание 8.

Площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равна 576, $AB + CD = 50$, $BC \times AD = 527$. Найти стороны четырёхугольника.